

PROJEÇÕES PLANARES

Prof. Dr. André Luiz Battaiola

Departamento de Design da Universidade Federal do Paraná

Email: albattaiola@ufpr.br

URL: www.design.ufpr.br/lai

1. Introdução

A humanidade utiliza há séculos o conceito de projeções geométricas. O mais antigo exemplo de uso de desenho técnico na história da humanidade data de aproximadamente 2150 A.C. O desenho contém uma planta de um prédio da cidade de Lagash na Mesopotâmia.

De acordo com alusões literárias, os geômetras e pintores gregos da antiguidade clássica estavam familiarizados com as leis da perspectiva. O pintor Agatharchus foi o primeiro a usar perspectivas em larga escala no período de 5 séculos A.C. e escreveu um livro sobre “pintura de cenas”, o que inspirou os filósofos Anaxagoras e Demócrito a escrever sobre perspectiva.

A primeira evidência real do uso de desenhos para guiar edificações foi encontrado nos textos de Vitruvius, um arquiteto e engenheiro romano do período de Júlio César e Augustus, em torno do ano 14 A.C.

Apesar do estudo de gregos e romanos, uma formalização destas técnicas só surgiu durante a Renascença. Os pintores Duccio (1255-1319), pintor do famoso quadro “A Última Ceia”, e Giotto (1276-1336) empreenderam esforços no sentido de representar a terceira dimensão através da perspectiva. Filippo Brunelleschi (1377-1446) foi o primeiro artista a desenvolver um sistema matemático para a perspectiva. O primeiro tratado sobre perspectiva, *Della Pittura*, foi publicado em 1435 por Leone Battista Alberti (1404-1472). No mesmo período, a técnica da perspectiva continuou a ser aperfeiçoada por Piero della Francesca (1420-1492) através do texto *De Prospettiva Pingendi* e por Leonardo da Vinci que pintou a sua versão de “A Última Ceia”.

Gaspar Monge (1746-1818), um desenhista de fortificações militares francesas, foi o primeiro a descrever de forma organizada o uso de projeções em engenharia, o que lhe valeu o título de “pai da geometria descritiva”. Monge publicou a primeira edição do livro *Geometrie Descriptive* em 1801.

Desta época para a atual, as técnicas de projeções continuaram a ser estudadas e aperfeiçoadas e se popularizaram entre profissionais e estudantes de engenharia, artes e arquitetura. Com o surgimento da computação gráfica e com a popularização de sistemas e bibliotecas gráficas, o número de interessados nas técnicas de projeções se ampliou acentuadamente.

Geralmente usuários de sistemas ou bibliotecas gráficas se deparam com operações relacionadas a posicionamento e especificação de câmeras ou então a ajuste de transformações que permitam o correto posicionamento de um objeto em uma cena. Tão comum quanto estas operações, é a dificuldade do usuário em realizá-las de forma totalmente segura e compreensível. Outro problema nesta mesma linha que o usuário se depara é quando ele transporta os objetos criados em um determinado sistema gráfico para outro. Usualmente, falta-lhe um conhecimento mais conceitual do modo de funcionamento destas operações.

O objetivo deste curso é conceituar projeções planares, apresentando a sua classificação e formas algébricas de manipulá-las.

2. Transformações Afins

Uma transformação de coordenadas da forma:

$$\vec{v}' = A \vec{v} + \vec{b}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.1})$$

é denominada uma transformação “afim”. Neste caso, as coordenadas (x',y',z') do vetor \vec{v}' , que definem um ponto no espaço, são uma função linear de (x,y,z) e a_{ij} e b_i são constantes determinadas pelo tipo de transformação. Transformações afins tem a propriedade geral de transformar linhas paralelas em linhas paralelas e mapear pontos finitos em pontos finitos. Note-se que em geometria afim, paralelismo é um conceito importante, sendo relações entre linhas paralelas uma parte substancial da geometria e os teoremas da geometria afim são idênticos aos da geometria euclidiana.

Rotação, translação, escalamento, espelhamento e cizalhamento são exemplos de transformações afins detalhados a seguir.

2.1 Translação

A translação, alteração da posição de um ponto através da soma de constantes de deslocamento as suas coordenadas, é normalmente aplicada sobre todos os pontos de uma figura, de maneira a possibilitar a sua movimentação no espaço (fig. 2.1). O exemplo clássico em computação gráfica de aplicação desta transformação é a função *pan*, disponível em vários sistemas gráficos.

Em termos de transformação afim, a translação corresponde a soma de um vetor de deslocamento ao vetor que define o ponto que se deseja deslocar. Assim, na equação 2.1, o vetor com as componentes b_i corresponde ao vetor de deslocamento.

2.2 Escalamento

O escalamento, multiplicação das coordenadas de um ponto por valores iguais ou diferentes, é normalmente aplicado sobre todos os pontos de uma figura com o objetivo de ampliar ou reduzir sua dimensão ou então distorcer a sua forma geométrica (fig. 2.2). O uso clássico desta operação em computação gráfica é a função *zoom in* (ampliação) ou *zoom out* (redução).

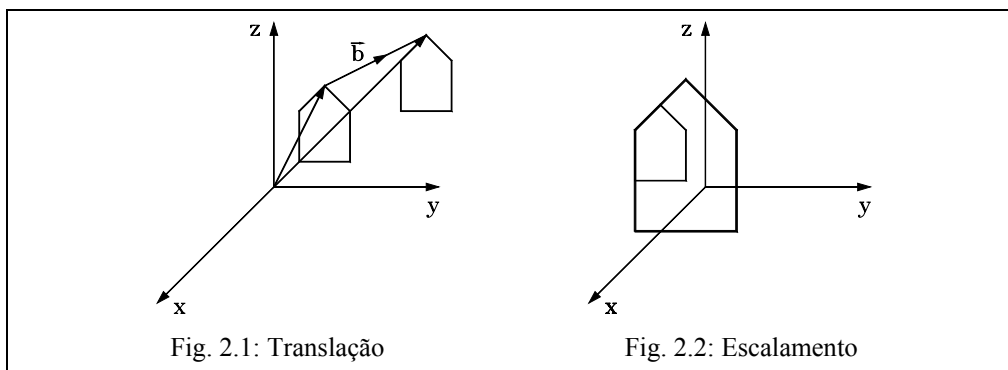


Fig. 2.1: Translação

Fig. 2.2: Escalamento

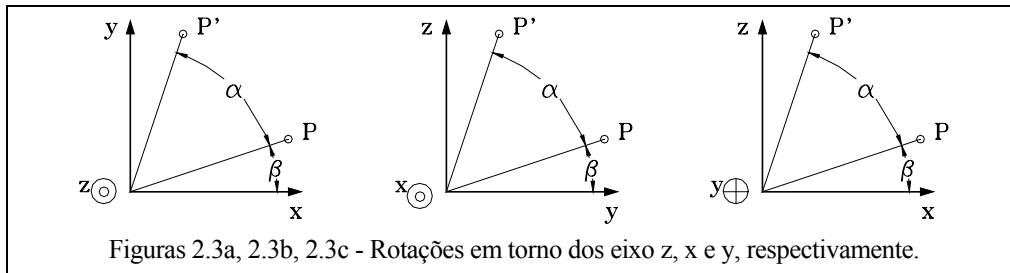
Quando somente a operação de escalamento é realizada, a matriz A na equação 2.1 fica a matriz E , onde e_x , e_y , e_z , são os fatores de escala das coordenadas x , y e z , respectivamente. Observa-se facilmente que a aplicação desta matriz sobre o vetor de coordenadas gera o vetor escalado \vec{v} , conforme descrito abaixo.

$$E = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} e_x x \\ e_y y \\ e_z z \end{bmatrix}$$

2.3 Rotação

A rotação é o giro de um determinado ângulo de um ponto em torno de um ponto de referência, sem alteração da distância entre eles. Esta operação é aplicada normalmente sobre todos os pontos de uma figura, o que possibilita que ela seja rotacionada. Vários programas gráficos dispõem desta operação, sendo que alguns restringem o ângulo de rotação a valores fixos, tais como, 90° e 180°.

Para o cálculo da matriz de rotação, será considerado inicialmente apenas duas coordenadas, por exemplo, x e y . Assim, na figura 2.3a, o ponto P , de coordenadas (x,y) , será rotacionado de um ângulo α em torno do eixo z , até a posição do ponto P' (x',y') . A linha que une o ponto P a origem do sistema de coordenadas está rotacionada de um ângulo β em relação ao eixo x .



Supondo-se que a distância ponto P a origem seja “ D ”, tem-se:

$$x = D \cos(\alpha) \quad (\text{eq. 2.2}) \quad x' = D \cos(\alpha + \beta) \quad (\text{eq. 2.4})$$

$$y = D \sin(\beta) \quad (\text{eq. 2.3}) \quad y' = D \sin(\alpha + \beta) \quad (\text{eq. 2.5})$$

Da trigonometria tem-se:

$$\cos(a + b) = \cos(b) \times \cos(a) - \sin(b) \times \sin(a) \quad (\text{eq. 2.6})$$

$$\sin(a + b) = \cos(b) \times \sin(a) + \sin(b) \times \cos(a) \quad (\text{eq. 2.7})$$

Usando-se as equações 2.2, 2.3, 2.6 e 2.7 nas equações 2.4 e 2.5 tem-se:

$$x' = x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \quad (\text{eq. 2.8})$$

$$y' = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \quad (\text{eq. 2.9})$$

Em forma matricial, as equações 2.8 e 2.9 ficam:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.10})$$

Similarmente, a fórmula 2.10 se aplica as rotações das figuras 2.3b e 2.3c. No entanto, para se estender esta fórmula para rotações tridimensionais, deve-se considerar primeiramente o problema da orientação dos eixos. Note-se que:

$$v\vec{z} = v\vec{x} \times v\vec{y} \quad (\text{eq. 2.11}) \quad v\vec{x} = v\vec{y} \times v\vec{z} \quad (\text{eq. 2.12})$$

$$-v\vec{y} = v\vec{x} \times v\vec{z} \quad (\text{eq. 2.13})$$

Neste caso, $v\vec{x}$, $v\vec{y}$ e $v\vec{z}$ são versores nas direções x , y e z , respectivamente. Nas figuras 2.3a, 2.3b e 2.3c os resultados das equações 2.11, 2.12 e 2.13 são indicados pelo conteúdo das circunferências posicionadas do lado esquerdo dos eixos. Sendo o conteúdo uma circunferência menor, o eixo resultante do produto vetorial dos eixos referenciados no plano tem sinal positivo, o que implica que o seu sentido é do plano para o leitor. Se o conteúdo é uma cruz, o sinal é negativo, sentido inverso. Assim, para manter a consistência, a aplicação da fórmula matricial 2.10 deve considerar que os eixos referenciados no plano da figura 2.3c estão invertidos, sendo o correto:

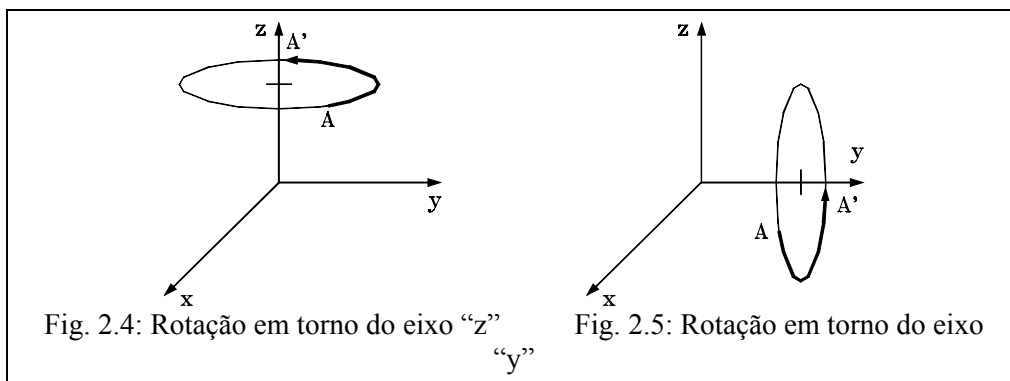
$$\begin{bmatrix} z' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.14})$$

Considerando-se as figuras 2.3a, 2.3b e 2.3c e as fórmulas 2.10 e 2.14, pode-se facilmente deduzir as fórmulas para o cálculo no espaço tridimensional da rotação de um ponto A para o ponto A', sendo o plano de rotação perpendicular ao eixo z (fig. 2.4), y (fig. 2.5) e x (fig. 2.7).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.15}) \quad \text{Rotação em torno do eixo } z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.16}) \quad \text{Rotação em torno do eixo } y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.17}) \quad \text{Rotação em torno do eixo } x$$



Uma operação bastante conhecida em computação gráfica é o espelhamento, a qual consiste em rotacionar um objeto em torno de um eixo de tal maneira que os pontos do objeto na posição original e na rotacionada mantenham a mesma distância em relação a uma linha de referência, caso bidimensional, ou a um plano de referência, caso tridimensional. Na figura 2.7, há o espelhamento de um objeto em torno do eixo y em relação ao plano xy e em torno do eixo z em relação ao plano xz. Em ambos os casos, o ângulo de rotação é 180°.

A matriz de rotação em torno de um eixo genérico (fig. 2.8) não é complexa, porém trabalhosa em termos de dedução, assim, será apresentado apenas a matriz **MGR** que permite esta operação. Sendo **N** um vetor unitário de coordenadas (x,y,z) e θ o ângulo de rotação, tem-se:

$$MGR = \begin{bmatrix} tx^2 + c & txy - sz & txz + sy \\ txy + sz & ty^2 + c & tyz - sx \\ txz - sy & tyz + sx & tz^2 + c \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2.18})$$

Onde:

$$\begin{array}{ll} x,y,z = \text{coordenadas de N} & t = 1 - \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) & c = \cos(\theta) \end{array}$$

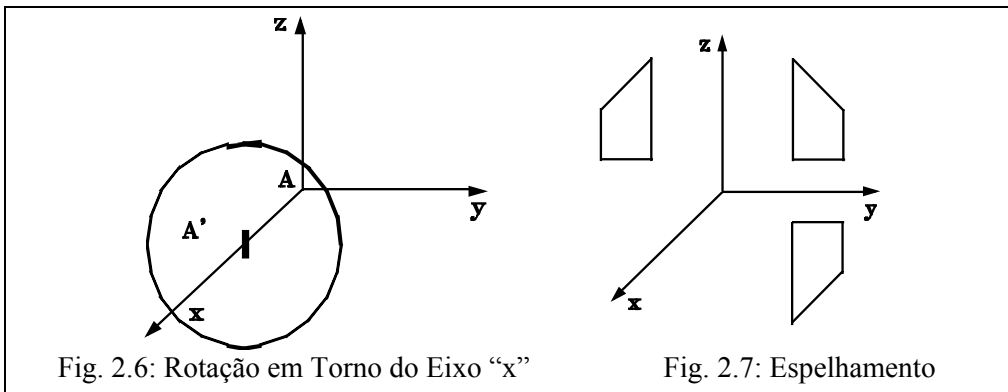


Fig. 2.6: Rotação em Torno do Eixo "x"

Fig. 2.7: Espelhamento

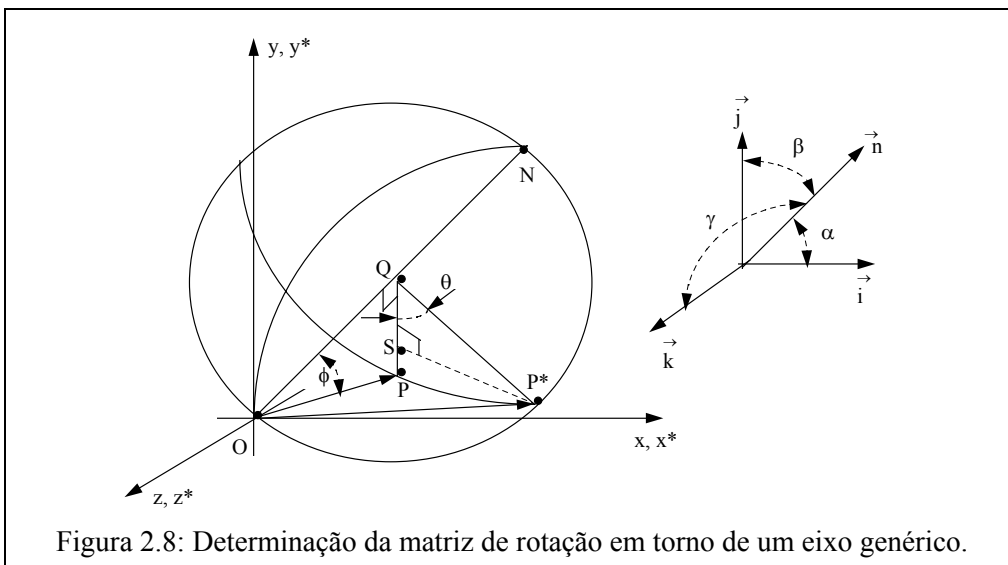


Figura 2.8: Determinação da matriz de rotação em torno de um eixo genérico.

2.4 Cisalhamento

Outra transformação afim importante de ser estudada é o cisalhamento (*shear*), cujo exemplo clássico para o sistema de coordenadas bidimensional que explica a sua função é o da italização de um caracter (fig. 2.9). Neste caso, há uma variação no valor da coordenada x em função do valor da y (fig. 2.9 i_1 e i_2), sendo MTS_1 a matriz de transformação correspondente. Pode-se associar uma outra transformação a de cisalhamento, como, por exemplo, o escalamento da coordenada y (fig. 2.9 i_3), conforme exemplificado em MTS_2 . A matriz MTS_3 ilustra o uso desta transformação para o caso tridimensional.

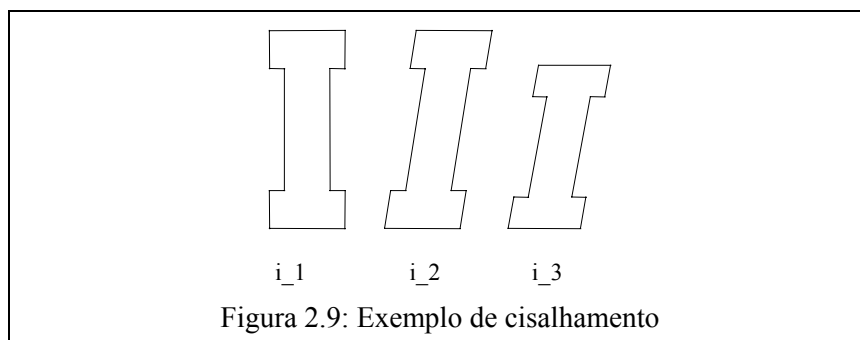
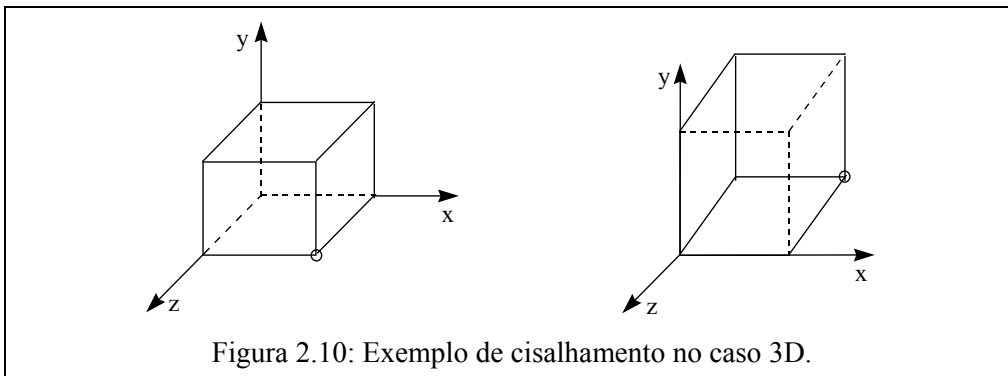


Figura 2.9: Exemplo de cisalhamento

$$MTS_1 = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

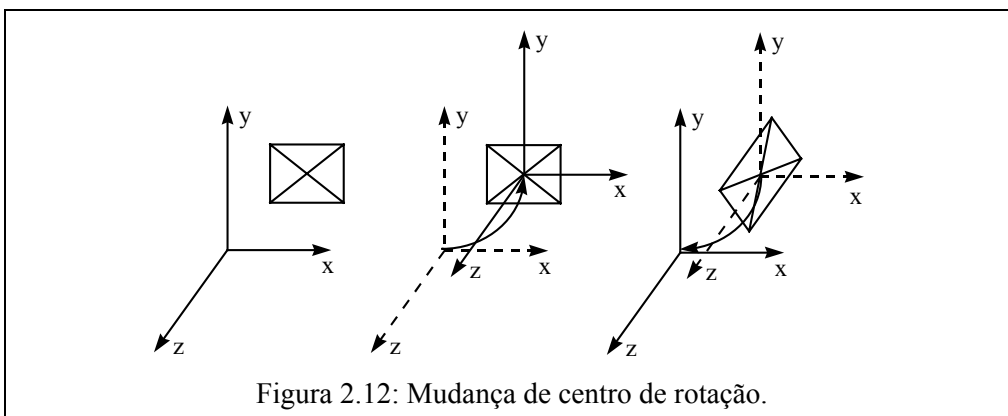
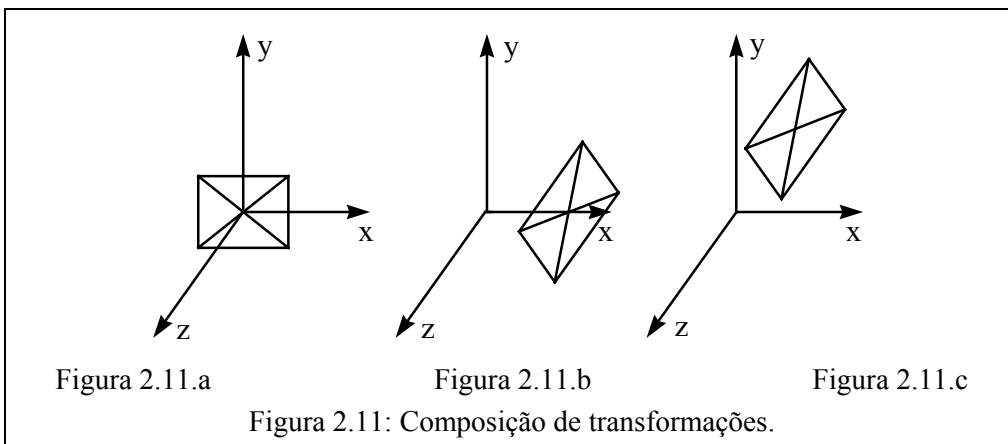
$$MTS_2 = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ 0 & e_y \end{bmatrix}$$

$$MTS_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_x \\ 0 & 1 & s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2.5 Composição de Transformações

Uma importante questão que sempre deve ser considerada com relação as transformações afins se refere a sua composição. Neste caso, a ordem em que elas são executadas pode alterar o resultado final esperado. Considere-se então duas transformações afins, uma somente de rotação de 45° em torno do eixo z e outra somente de translação de valor Δx ao longo do eixo x . Como a rotação é realizada em relação a origem do sistema de coordenadas, considerando-se a figura 2.11.a, a aplicação primeiro da rotação e depois da translação resulta na figura 2.11.b e o inverso na figura 2.11.c.



Neste sentido, caso se deseje rotacionar um objeto no espaço em torno de um ponto interno a ele, deve se primeiramente deslocar o centro de rotação (origem dos eixos) para este ponto, proceder a rotação e posteriormente voltar o centro de rotação a sua posição inicial (fig. 2.12). Note-se que isto equivale a deslocar o objeto para o centro de coordenadas.

3. Coordenadas Homogêneas

Como detalhado no capítulo 2, uma transformação afim segue a forma:

$$\vec{v}' = M \vec{v} + \vec{b} \quad (\text{eq. 3.1})$$

Esta formulação é, em termos de cálculo, bastante inconveniente para se determinar as coordenadas do vetor final, após uma série de transformações de um vetor inicial. A formulação da equação 3.4 é muito mais conveniente porque permite que o cálculo de múltiplas transformações seja realizado calculando-se a matriz de transformação resultante e aplicando-se esta matriz sobre o vetor (eq. 3.5).

$$\vec{v}_1 = M_1 \vec{v} + \vec{b}_1 \quad (\text{eq. 3.2})$$

$$\vec{v}_2 = M_2 M_1 \vec{v} + M_2 \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \quad (\text{eq. 3.3})$$

$$\vec{v}' = M \vec{v} \quad (\text{eq. 3.4})$$

$$\vec{v}' = M_n M_{n-1} \dots M_1 \vec{v} \quad (\text{eq. 3.5})$$

A impossibilidade de se inserir a transformação de translação na matriz M não permite que a formulação 3.5 seja usada, assim, é necessário se encontrar um mecanismo que contorne este problema. A solução usual para este problema é a alteração do espaço de coordenadas de dimensão 3 para 4, de forma controlada, de maneira que a dimensão da matriz M se altere de 3×3 para 3×4 e, assim, ela possa incorporar a transformação de translação (eq. 3.6). Como é inconveniente operar uma matriz não quadrada por não permitir, por exemplo, o cálculo da inversa, a matriz M_T pode ser novamente modificada pela inserção de mais uma linha que não altere o resultado final (eq. 3.7).

$$\begin{aligned} & (\text{eq. 3.6}) & & (\text{eq. 3.7}) \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x+l \\ y+m \\ z+n \\ 1 \end{bmatrix} & M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando-se uma matriz M genérica de dimensão 4×4 , quando ela é aplicada sobre o vetor \vec{v} , em coordenadas homogêneas, gera o vetor \vec{v}^* descrito a seguir: Para se calcular o vetor desejado, normaliza-se o vetor \vec{v}^* . Assim, supondo-se $H \neq 0$, tem-se \vec{v}' .

$$\vec{v}^* = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ H \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}' = \begin{bmatrix} X/H \\ Y/H \\ Z/H \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste contexto, uma propriedade interessante e bastante útil das coordenadas homogêneas se refere a representação de um ponto no infinito. Assim, considere-se o ponto sobre o eixo x indicado pelo vetor \vec{v}^* e \vec{v}' :

$$\vec{v}^* = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}' = \begin{bmatrix} A/H \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quando $H \rightarrow 0$, $A/H \rightarrow \infty$, logo a aplicação de uma matriz de transformação em coordenadas homogêneas resulta em um ponto no infinito quando o seu vetor posicional for do tipo \vec{v}^* descrito a seguir.

Em geral, utiliza-se os vetores infinitos \vec{x}_∞^* , \vec{y}_∞^* e \vec{z}_∞^* .

$$\vec{v}^* = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_\infty^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{y}_\infty^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{z}_\infty^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estes vetores infinitos serão, em especial, usados na determinação de pontos-de-fuga no caso de projeções planares perspectivas. Outras propriedades das coordenadas homogêneas serão exploradas posteriormente. Também posteriormente será mostrado que a matriz de transformação M de dimensão 4x4, pode ser particionada em 4 partes:

$$M = \begin{bmatrix} 3x3 & 3x1 \\ 1x3 & 1x1 \end{bmatrix}$$

1x3:	produz projeção perspectiva	1x1:	produz escalamento global
3x3:	produz uma transformação afim do tipo, rotação e escalamento	3x1:	produz translação

4. Projeções Planares

Dado que a exibição de um objeto 3D em uma tela de computador ou em uma folha de papel exige o mapeamento de um sistema de coordenadas 3D em um 2D, operações de projeção são requeridas. Em geral, entende-se como projeção, o processo de mapear um sistema de coordenadas de dimensão “n” em um de dimensão menor ou igual a “n-1”.

A humanidade utiliza há séculos o conceito de projeções geométricas. O mais antigo exemplo de uso de desenho técnico na história da humanidade data de aproximadamente 2150 A.C. O desenho contém uma planta de um prédio da cidade de Lagash na Mesopotâmia.

De acordo com alusões literárias, os geômetras e pintores gregos da antiguidade clássica estavam familiarizados com as leis da perspectiva. O pintor Agatharchus foi o primeiro a usar perspectivas em larga escala no período de 5 séculos A.C. e escreveu um livro sobre “pintura de cenas”, o que inspirou os filósofos Anaxagoras e Demócrito a escrever sobre perspectiva.

A primeira evidência real do uso de desenhos para guiar edificações foi encontrado nos textos de Vitruvius, um arquiteto e engenheiro romano do período de Júlio César e Augustus, em torno do ano 14 A.C.

Apesar do estudo de gregos e romanos, uma formalização destas técnicas só surgiu durante a Renascença. Os pintores Duccio (1255-1319), pintor do famoso quadro “A Última Ceia”, e Giotto (1276-1336) empreenderam esforços no sentido de representar a terceira dimensão através da perspectiva. Filippo Brunelleschi (1377-1446) foi o primeiro artista a desenvolver um sistema matemático para a perspectiva. O primeiro tratado sobre perspectiva, *Della Pittura*, foi publicado em 1435 por Leone Battista Alberti (1404-1472). No mesmo período, a técnica da perspectiva continuou a ser aperfeiçoada por Piero della Francesca (1420-1492) através do texto *De Prospettiva Pingendi* e por Leonardo da Vinci que pintou a sua versão de “A Última Ceia”.

Gaspar Monge (1746-1818), um desenhista de fortificações militares francesas, foi o primeiro a descrever de forma organizada o uso de projeções em engenharia, o que lhe valeu o título de “pai da geometria descritiva”. Monge publicou a primeira edição do livro *Geometrie Descriptive* em 1801.

Desta época para a atual, as técnicas de projeções continuaram a ser estudadas e aperfeiçoadas e se popularizaram entre profissionais e estudantes de engenharia, artes e arquitetura. Com o surgimento da computação gráfica e com a popularização de sistemas e bibliotecas gráficas, o número de interessados nas técnicas de projeções se ampliou acentuadamente.

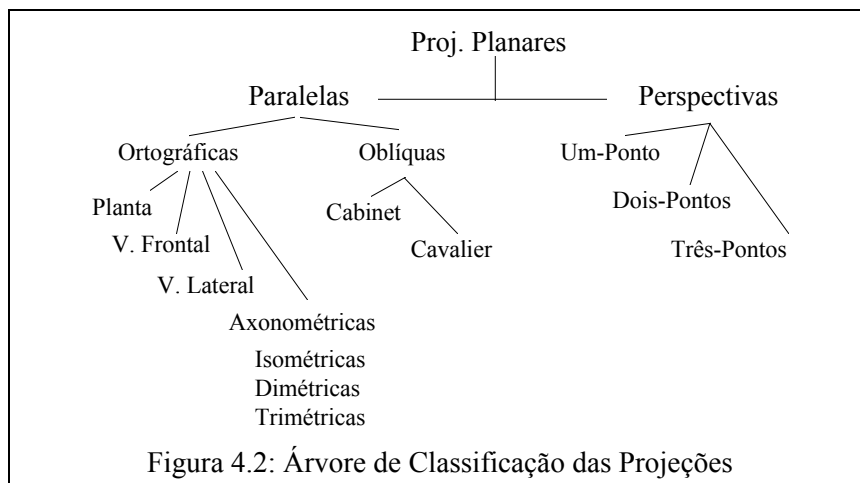
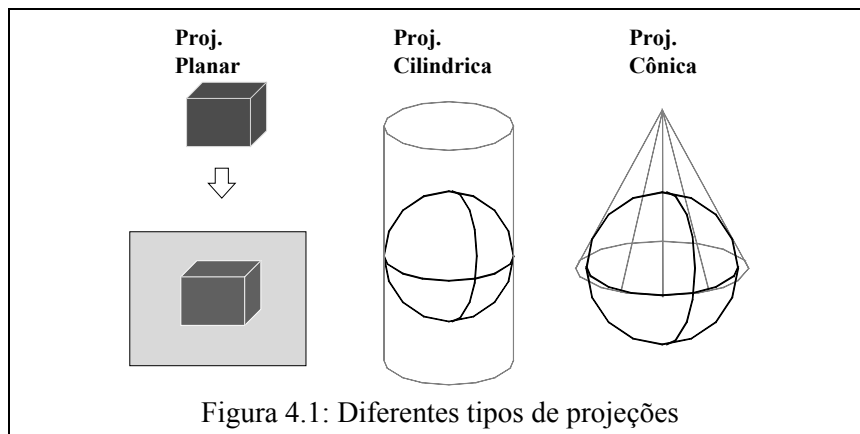
Geralmente usuários de sistemas ou bibliotecas gráficas se deparam com operações relacionadas a posicionamento e especificação de câmeras ou então a ajuste de transformações que permitam o correto posicionamento de um objeto em uma cena. Tão comum quanto estas operações é a dificuldade do usuário em realizá-las de forma totalmente segura e compreensível. Outro problema nesta mesma linha que o usuário

se depara é quando ele transporta os objetos criados em um determinado sistema gráfico para outro. Comumente, falta-lhe um conhecimento mais conceitual do modo de funcionamento destas operações. O objetivo deste curso é conceituar projeções planares, apresentando a sua classificação e formas algébricas de manipulá-las. Com base nestes conceitos, será ilustrado o funcionamento do esquema de transformações em bibliotecas e sistemas gráficos que manipulam primitivas tridimensionais.

As projeções mais consideradas em CG são as que projetam um sistema de coordenadas 3D em um 2D, realizam a projeção em um plano ao invés de uma superfície curva, como também utilizam raios projetores lineares ao invés de curvos (fig. 4.1). Esta classe de projeções é conhecida como “projeções geométricas planares” e podem ser subclassificadas de acordo com o esquema da figura 4.2

4.1 Classificação das Projeções Planares

As projeções planares paralelas e perspectivas diferem com relação a distância do plano de projeção ao centro de projeção. Se a distância é finita, a projeção é perspectiva, se a distância é infinita, a projeção é paralela (fig. 4.3).



4.2 Projeções Planares Paralelas

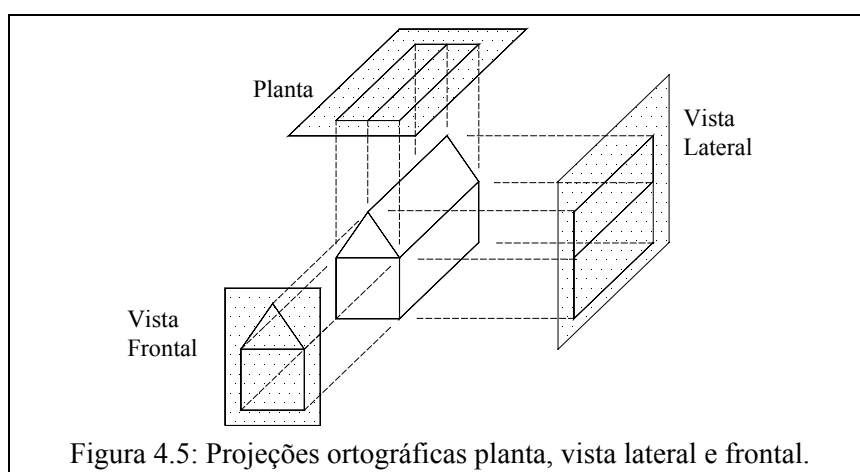
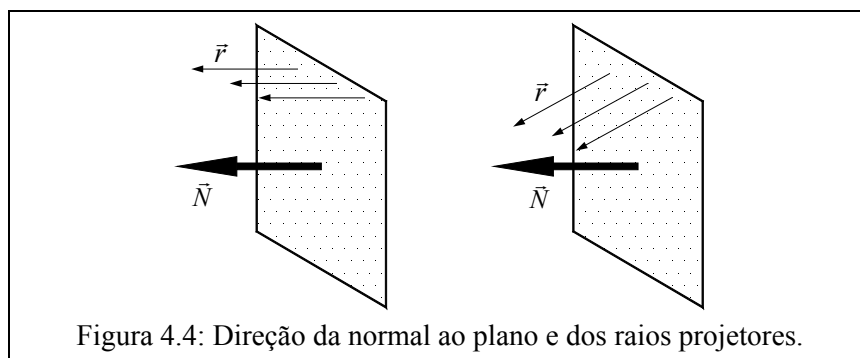
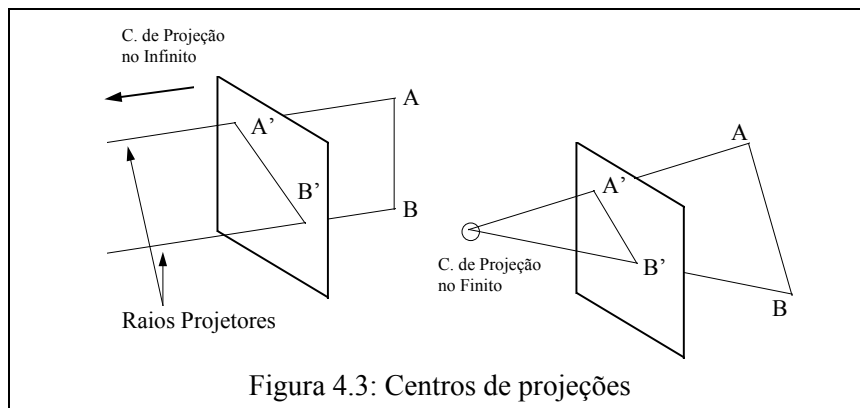
Projeções paralelas são subclassificadas em ortográficas e oblíquas, dependendo da relação entre a direção dos raios projetores e a normal ao plano de projeção (fig. 4.4). Em projeções ortográficas, as direções são as mesmas. Em projeções oblíquas, são diferentes.

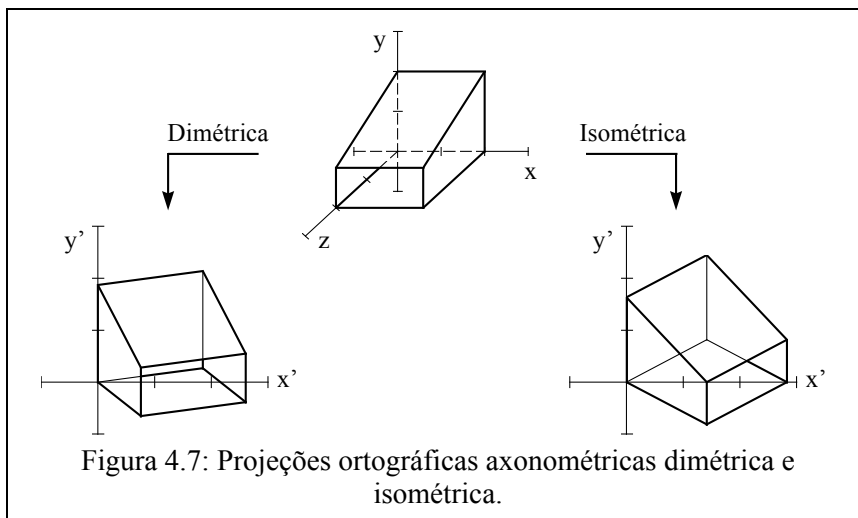
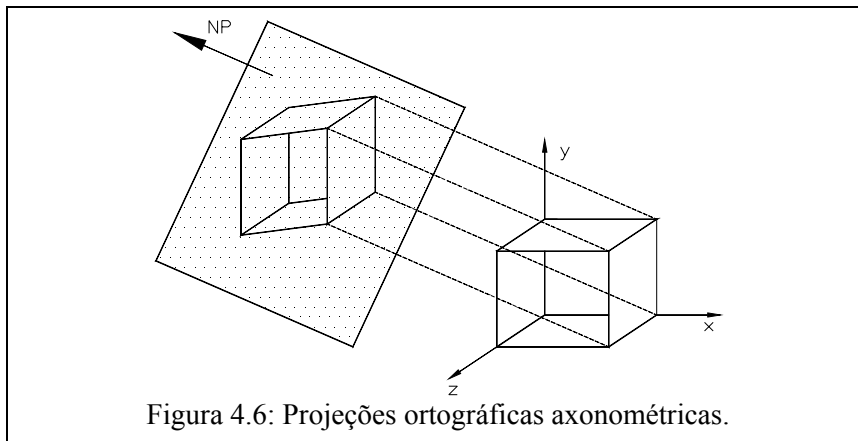
As projeções ortográficas vista lateral, vista frontal e planta constituem as projeções normalmente utilizadas em desenho técnico (fig. 4.5). Elas oferecem uma visão parcial do objeto, no entanto, mantêm sem alteração as relações de dimensões e ângulos do objeto projetado. Estas projeções são geralmente utilizadas em conjunto, contando também com uma projeção axonométrica ou perspectiva.

As projeções paralelas ortográficas axonométricas têm a direção dos raios projetores e a normal ao plano de projeção coincidentes, porém distintas da direção das normais dos planos dos eixos cartesianos. Desta forma, permitem a visualização de várias faces de um objeto de uma única vez (fig. 4.6).

Projeções axonométricas distorcem os objetos, alterando relações de ângulos e dimensões de lados dos objetos, no entanto, mantêm relações de paralelismo entre eles. A alteração da dimensão dos lados é relacionada com a alteração da dimensão dos versores em cada um dos eixo x , y e z , quando projetados no plano. Assim, projeções axonométricas se subdividem em dimétricas, dois versores variam a dimensão igualmente quando projetados no plano, isométricas, os três versores variam na mesma proporção (fig. 4.7) e trimétricas, os três versores variam de forma diferenciada.

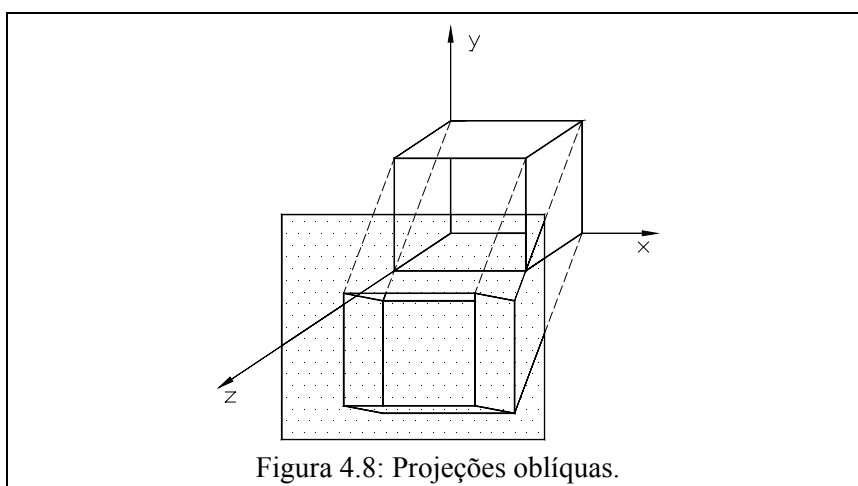
As projeções paralelas oblíquas têm a direção da normal ao plano de projeção distinta da direção dos raios projetores (fig. 4.7). As projeções paralelas oblíquas se subdividem em *cavalier* e *cabinet* (fig. 4.8). Na *cabinet* há um encolhimento na dimensão do versor perpendicular ao plano de projeção para corrigir a ilusão de que o objeto exibido é maior na direção deste versor.

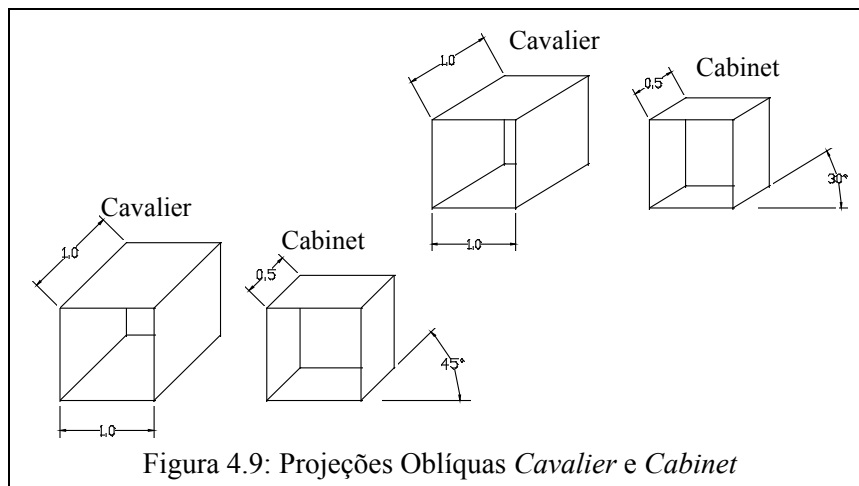




4.3) Projeções Planares Perspectivas

O efeito visual de uma projeção perspectiva é bastante realístico, pois as dimensões de um objeto projetado variam inversamente com relação ao centro de projeção, o que está de acordo com o modo de funcionamento do sistema visual humano. Além disto, como as projeções axonométricas, elas permitem a visualização conjunta de várias faces de um objeto. No entanto, as projeções perspectivas não são úteis para documentar precisamente as formas de um objeto, dado que as dimensões e os ângulos dos seus lados podem sofrer alterações após a projeção. Em especial, pode haver perda do paralelismo entre as linhas.





Como a projeção perspectiva tem o centro de projeção localizado em um ponto finito, ocorre uma distorção no objeto projetado que faz com que qualquer conjunto de linhas que não sejam paralelas ao plano de projeção converjam para um mesmo ponto denominado ponto-de-fuga. O surgimento do ponto-de-fuga pode ser melhor compreendido observando-se as figuras 4.10 e 4.11.

Na figura 4.10, um raio projetor parte do centro de projeção e incide sobre um ponto **p** da linha **I_B**. Quando **p** tende a infinito, o raio projetor vai encontrar este ponto no infinito, o que significa que a linha **RP** vai ficar paralela a linha **I_B**, cruzando, assim, o plano **x** sempre no mesmo ponto **pf**. Note-se que um ponto sobre a linha **I_A**, paralela a linha **I_B**, vai ser alcançado no infinito de forma similar ao ponto sobre a linha **I_B**, ou seja, o raio projetor corta o eixo **x** no mesmo ponto **pf**.

Quando o raio projetor incide sobre uma linha paralela ao eixo de projeção, não se tem ponto-de-fuga. A explicação para este caso é simples, considere-se o ponto **A** da figura 4.11 que está sobre a linha **I_A**, paralela ao plano **xy**, assim, quando **A** tender a infinito, o raio projetor **RP1** vai encontrá-lo no infinito e, neste caso, estará paralelo ao plano **xy**, o que evita o surgimento do ponto-de-fuga. Ao contrário, o raio projetor **RP2** que incide sobre o ponto **B** sobre a linha **I_B**, perpendicular ao plano **xy**, vai tender ao ponto **O** quando **B** tender a infinito. Neste caso, a projeção perspectiva do retângulo da figura 4.11 vai apresentar apenas um ponto-de-fuga. Para que a projeção deste retângulo apresente mais de um ponto-de-fuga basta rotacioná-lo (fig. 4.12), o que faz com as suas linhas paralelas fiquem inclinadas em relação ao plano **xy**.

Para melhor se compreender a relação entre os pontos-de-fuga e o centro de projeção, a figura 4.13 apresenta a forma de se obter a projeção perspectiva de um paralelepípedo com lados paralelos ao eixo **x** e centro de projeção sobre o eixo **z**. O objeto é projetado do sistema de coordenadas 3D **xyz** no sistema de coordenadas 2D **x'y'**. Dado que a dimensão dos lados **AB**, **CD**, **EF** e **GH** não são visíveis, a dimensão dos lados **A'B'**, **C'D'**, **E'F'** e **G'H'** foram definidas arbitrariamente.

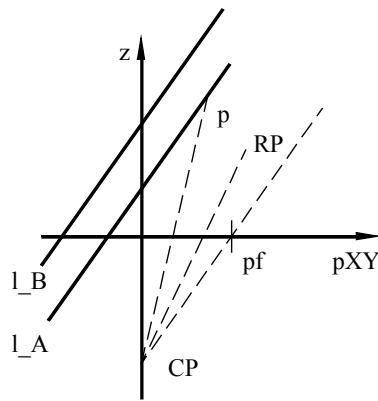


Figura 4.10

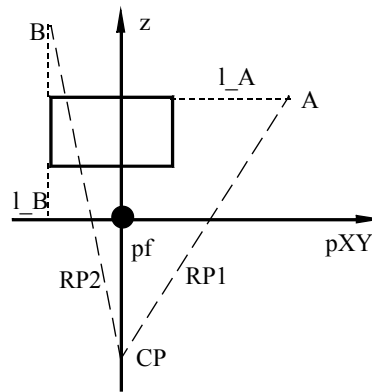


Figura 4.11

Figura 4.10: Centro de projeção e ponto-de-fuga em uma projeção perspectiva.

Figura 4.11: Projeção perspectiva de linhas paralelas e perpendiculares ao plano XY de projeção.

Em função do número de pontos-de-fuga associados as linhas paralelas aos três eixos cartesianos, as projeções perspectivas se subdividem em projeções de um ponto-de-fuga (fig. 4.14), de dois pontos-de-fuga (fig. 4.15) e de três pontos-de-fuga (fig. 4.16). Note-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.

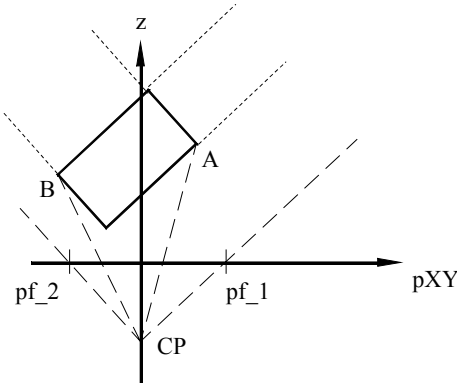
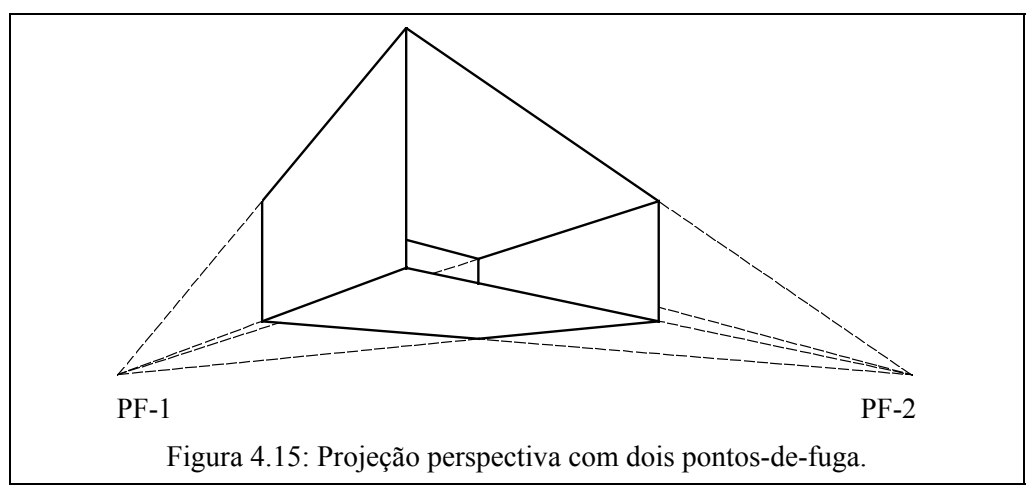
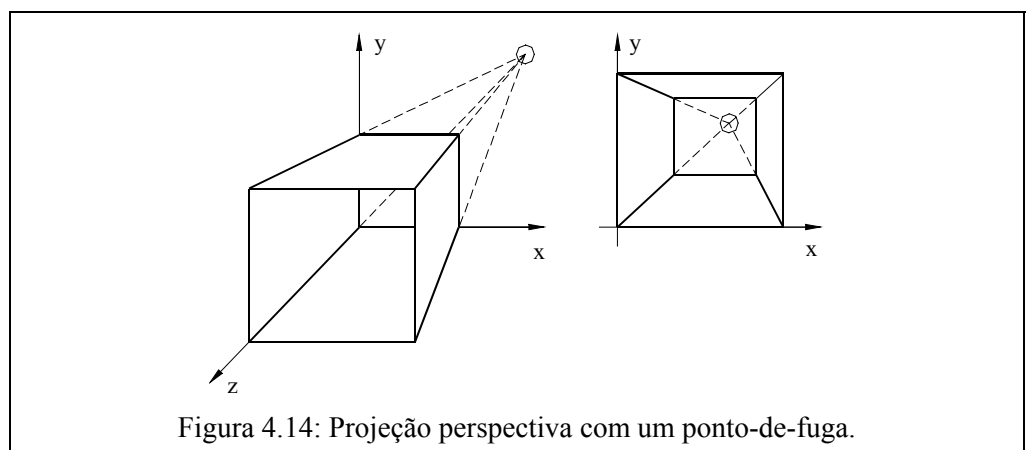
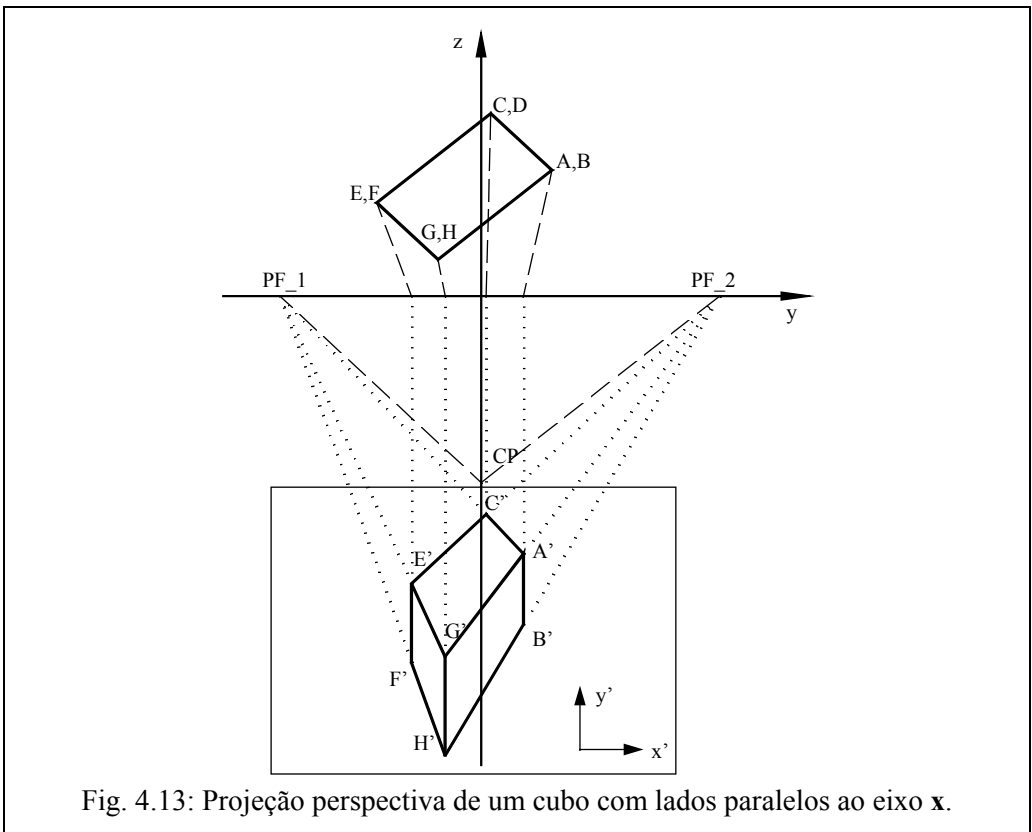
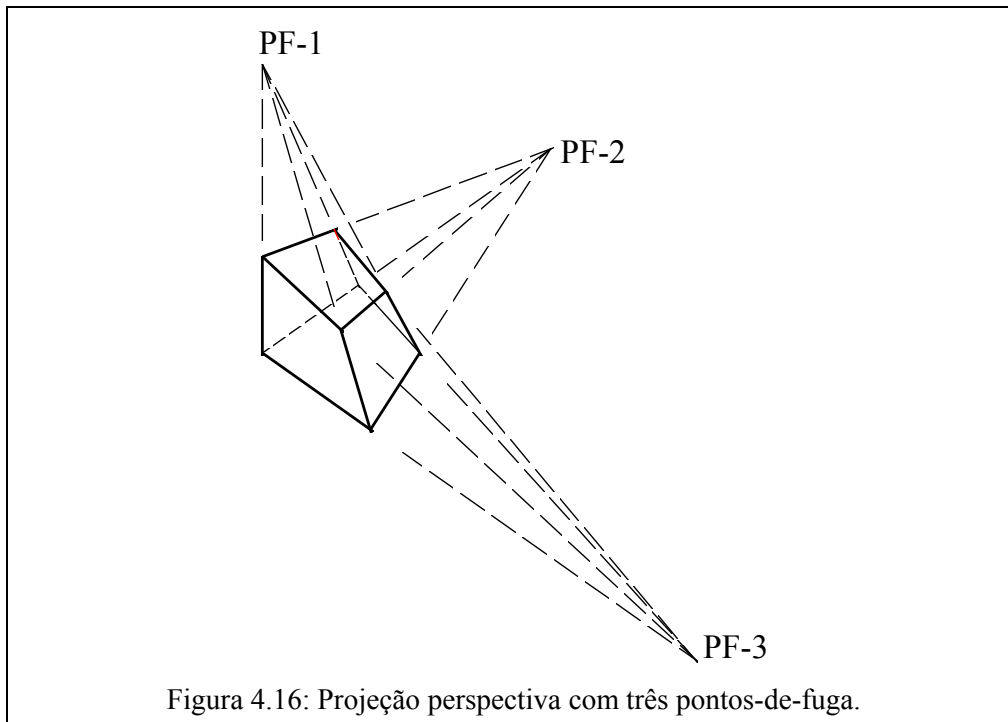


Figura 4.12: Projeção perspectiva de linhas inclinadas em relação ao plano de projeção.





5. Álgebra das Projeções Planares Paralelas

Para que as projeções possam ser geradas em computador é necessário se definir matrizes de transformações que, aplicadas ao conjunto de pontos de um objeto tridimensional, permita a obtenção da figura projetada do objeto. Assim, a seguir, para cada tipo de projeção serão determinadas as matrizes de transformação. Este capítulo cobre a álgebra das projeções planares paralelas.

5.1 Álgebra das Projeções Planares Paralelas Ortográficas

As projeções planares ortográficas vista lateral, frontal e planta são obtidas de forma bastante simples através de rotações ortogonais, de acordo com as regras abaixo, e projeção no plano xy através de raios projetores perpendiculares a este plano (fig. 4.5)

- vista lateral - rotaciona de -90° no eixo x , elimina coordena z
- vista frontal - rotaciona de 90° no eixo y , elimina coordena z
- planta - sem rotação, elimina coordena z

Dada a simplicidade do processo de projeção neste caso, é detalhado apenas a geração da vista lateral. Assim, partindo-se da equação de rotação em torno do eixo x , determina-se a matriz de projeção da vista lateral MP_v (eq. 5.2).

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.1})$$

Sendo $\theta = -90^\circ$ e considerando-se a projeção no eixo xy , a matriz fica:

$$MP_{VL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.2})$$

Note-se que o versor sobre o eixo z , $(0,0,1)$, será projetado em $(0,1)$, como exemplificado nas figuras 5.1a e 5.1b. Observe-se a ordem correta dos eixos, pois eles estão invertidos em relação aos da figura 4.7.

5.2 Álgebra das Projeções Planares Paralelas Ortográficas Axonométricas

As projeções vista lateral, frontal e planta permitem uma observação parcial do objeto projetado, em especial, caso se observe apenas uma delas, não é possível se conceber corretamente a forma do objeto. De forma a solucionar este problema, é usual a folha de projeto de um objeto conter as projeções vista lateral, frontal e planta, mais uma projeção axonométrica, a qual permite que se tenha uma visão mais integrada do objeto.

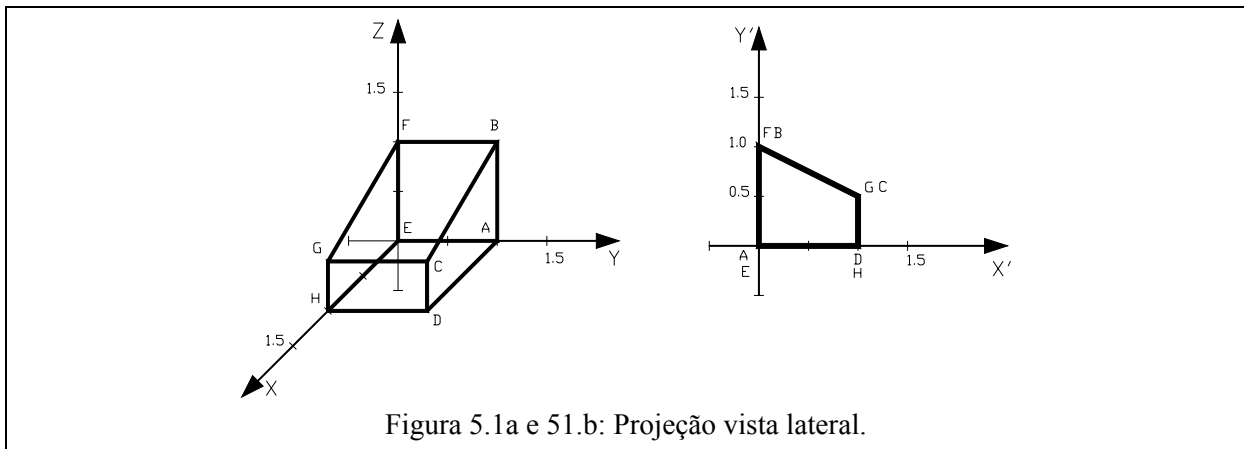


Figura 5.1a e 5.1b: Projeção vista lateral.

Como citado no capítulo 4, as projeções paralelas ortográficas axonométricas têm a direção de projeção e a normal ao eixo de projeção não coincidentes com a direção de um dos eixos principais (fig. 4.6). Isto é equivalente a se rotacionar adequadamente o objeto e considerar a direção de projeção e a normal ao eixo de projeção coincidentes com a direção de um dos eixos principais.

Nas projeções axonométricas há uma alteração da dimensão dos lados do objeto quando projetados sobre o plano. O tipo de rotação do objeto e as considerações sobre a alteração das dimensões permitem que sejam determinadas as matrizes de projeção. Neste sentido, o cálculo destas matrizes vai partir de uma rotação do objeto em torno do eixo y e posteriormente do eixo x (eq. 5.3).

$$R_X R_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.3})$$

$$R_X R_Y = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\cos(\phi)\sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.4})$$

Aplicando-se esta matriz sobre os vetores unitários $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, versores nos eixos x , y , e z respectivamente, tem-se:

$$\vec{u}'_X = \begin{bmatrix} x'_X \\ y'_X \\ z'_X \\ 1 \end{bmatrix} = R_X R_Y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.5})$$

$$\vec{u}'_Y = \begin{bmatrix} x'_Y \\ y'_Y \\ z'_Y \\ 1 \end{bmatrix} = R_X R_Y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.6})$$

$$\vec{u}'_Z = \begin{bmatrix} x'_Z \\ y'_Z \\ z'_Z \\ 1 \end{bmatrix} = R_X R_Y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\phi) \\ -\cos(\phi)\text{sen}(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.7})$$

Considerando-se apenas as componentes **x** e **y** dos versores rotacionados, tem-se as projeções destes vetores sobre os plano **xy**. De forma a se estipular condições para o encolhimento da dimensão destes vetores, é calculado os seus módulos, como ilustrado a seguir. Assim, para o caso da projeção do versor sobre eixo **x** tem-se:

$$|\vec{u}_x|_{XY} = \sqrt{(x'_x)^2 + (y'_x)^2} \quad (\text{eq. 5.8})$$

$$|\vec{u}_x|_{XY} = \sqrt{\cos^2(\phi) + (\text{sen}^2(\phi)\text{sen}^2(\theta))} \quad (\text{eq. 5.9})$$

Similarmente, para os versores sobre os eixos **y** e **z** tem-se:

$$|\vec{u}_y|_{XY} = |\cos(\theta)| \quad (\text{eq.5.10})$$

$$|\vec{u}_z|_{XY} = \sqrt{(\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)\text{sen}^2(\theta))} \quad (\text{eq. 5.11})$$

Considerando-se que no momento da projeção de um objeto 3D sobre o plano **xy**, ocorra um encolhimento por igual das coordenadas **x** e **y** dos pontos deste objetos, tem-se:

$$|\vec{u}_x|_{XY} = |\vec{u}_y|_{XY} \quad (\text{eq. 5.12})$$

$$\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi)\text{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta) \quad (\text{eq. 5.13})$$

Da trigonometria tem-se:

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha) = 1 \quad (\text{eq. 5.14})$$

Aplicando-se esta relação na equação 5.13, tem-se:

$$\text{sen}^2(\phi)\text{sen}^2(\theta) = \text{sen}^2(\phi) - \text{sen}^2(\theta) \quad (\text{eq. 5.15})$$

$$\text{sen}^2(\phi) = \text{sen}^2(\theta) / (1 - \text{sen}^2(\theta)) \quad (\text{eq. 5.16})$$

Uma maneira simples de se calcular os ângulos θ e ϕ é considerar um valor fixo para o encolhimento no eixo **z**. Assim, inicialmente será suposto que a dimensão do versor projetado será 1/2, ou seja, encolherá pela metade. Logo, da equação 5.11 tem-se:

$$\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)\text{sen}^2(\theta) = (1/2)^2 \quad (\text{eq. 5.17})$$

Aplicando-se a equação 5.15 e rearranjando, tem-se:

$$8\text{sen}^4(\theta) - 9\text{sen}^2(\theta) + 1 = 0 \quad (\text{eq. 5.18})$$

Fazendo-se $\text{sen}^2(\theta) = x$, tem-se:

$$8x^2 - 9x + 1 = 0 \quad (\text{eq. 5.19})$$

Resolvendo-se a equação 5.19, tem-se $x=1/8$ e $x=1$. A segunda raiz é inválida porque origina valor zero no denominador da equação 5.15. Usando-se a primeira raiz tem-se:

$$\text{sen}^2(\theta) = 1/8 \Rightarrow \text{sen}^2(\phi) = 1/7 \quad (\text{eq. 5.20})$$

$$\therefore \theta = 20.705^\circ \quad \text{e} \quad \phi = 22.208^\circ \quad (\text{eq. 5.21})$$

Desta maneira aplicando-se os valores obtidos na equação 5.21, tem-se a seguinte matriz:

$$R_X \ R_Y = \begin{bmatrix} 0.925820 & 0. & 0.377964 & 0 \\ 0.133631 & 0.935414 & -0.327321 & 0 \\ -0.353553 & 0.353553 & 0.866025 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.22})$$

$$MP_D = \begin{bmatrix} 0.925820 & 0. & 0.377964 & 0 \\ 0.133631 & 0.935414 & -0.327321 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.23})$$

A matriz MP_D anterior permite que se realize, após o zeramento da coordenada z , a projeção dimétrica (eq. 5.22), onde há o encolhimento por igual de duas coordenadas. No entanto, o maior interesse é na projeção isométrica que permite o encolhimento por igual de todas as coordenadas. Logo:

$$|\vec{u}_x|_{XY} = |\vec{u}_y|_{XY} = |\vec{u}_z|_{XY} \quad (\text{eq. 5.24})$$

Assim, além da equação 5.13, para a determinação dos ângulos tem-se a seguinte equação:

$$\text{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)\text{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta) \quad (\text{eq. 5.25})$$

Similarmente a equação 5.16, derivada da 5.12, podemos derivar da 5.25 a equação:

$$\text{sen}^2(\phi) = (1 - 2\text{sen}^2(\theta)) / (1 - \text{sen}^2(\theta)) \quad (\text{eq. 5.26})$$

$$\therefore \text{sen}^2(\theta) = 1 - 2\text{sen}^2(\phi) \Rightarrow \text{sen}^2(\theta) = 1/3$$

$$\text{sen}(\theta) = \sqrt{1/3} \Rightarrow \text{sen}(\phi) = \sqrt{1/2} \quad (\text{eq. 5.27})$$

$$\theta = 35.26429^\circ \quad \text{e} \quad \phi = 45.0^\circ \quad (\text{eq. 5.28})$$

Logo, substituindo os valores na matriz da equação 5.4, tem-se a matriz que permite a projeção isométrica (5.29), após se zerar a coordenada “z”:

$$R_X \ R_Y = \begin{bmatrix} 0.707107 & 0. & 0.707107 & 0 \\ 0.408248 & 0.816597 & -0.408248 & 0 \\ -0.577353 & 0.577345 & 0.577353 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.29})$$

$$MP_I = \begin{bmatrix} 0.707107 & 0. & 0.707107 & 0 \\ 0.408248 & 0.816597 & -0.408248 & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0. & 0. & 0. & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.30})$$

Neste caso, um fato interessante advém da análise do ângulo que o versor no eixo x faz com o eixo x' , quando projetado no plano $x'y'$ (fig. 5.2a).

Assim, da equação 5.5, tem-se:

$$\vec{u}_X = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.31})$$

$$\therefore \tan(\alpha) = (\text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta)) / \cos(\phi)$$

$$\tan(\alpha) = (\sqrt{1/2} \sqrt{1/3}) / \sqrt{1/2} = \sqrt{3} / 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30.0^\circ$$

Este resultado é bem conhecido de desenhistas, pois é com um esquadro de 30° e 60° que eles desenhavam a projeção de um objeto em uma folha de projeto.

A seguir é esboçado como se obtém uma projeção isométrica de um objeto. Este objeto é o da figura 4.7, e a matriz \vec{P}_I contém a descrição dos vetores posicionais de seus pontos (fig. 5.3a). O resultado está na figura 5.3b.

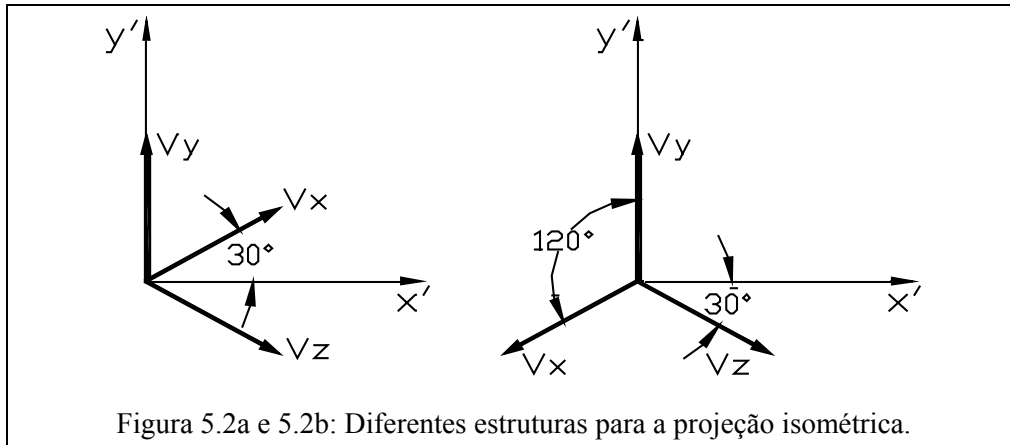


Figura 5.2a e 5.2b: Diferentes estruturas para a projeção isométrica.

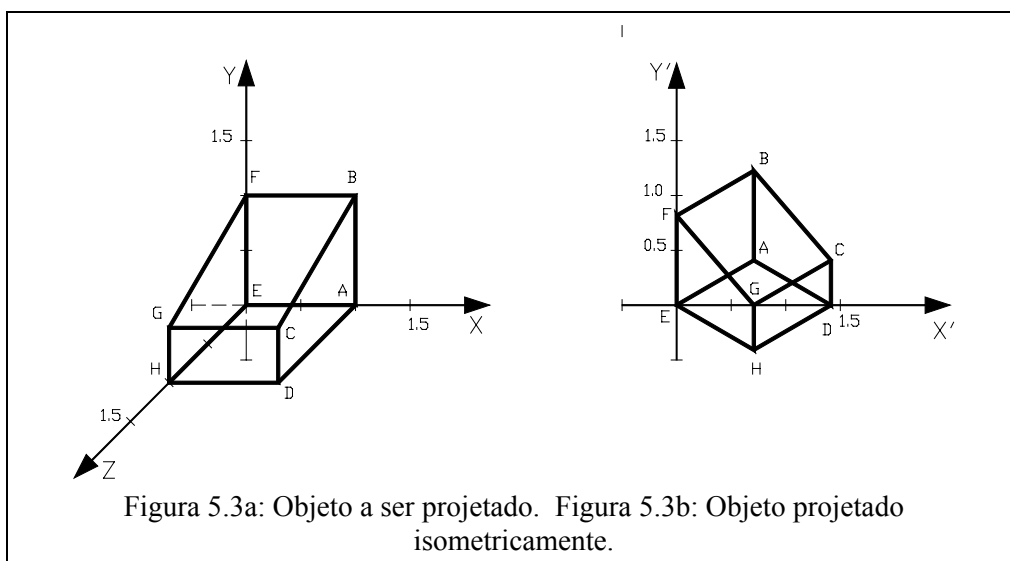


Figura 5.3a: Objeto a ser projetado. Figura 5.3b: Objeto projetado isometricamente.

$$\vec{P}_I = M_I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.32})$$

Uma consideração importante sobre projeções isométricas se refere ao fato que:

$$\text{sen}^2(\theta) = 1/3 \quad \Rightarrow \quad \theta = 35.26^\circ \quad \text{ou} \quad \theta = 144.74^\circ$$

$$\sin^2(\phi) = 1/3 \Rightarrow \phi = 45.00^\circ \text{ ou } \phi = 135.00^\circ$$

Logo, a projeção isométrica pode ser estruturada de outras formas. Na figura 5.2 é esboçada a estrutura trabalhada anteriormente (5.2a) e outra bastante utilizada (5.2b).

5.3 Álgebra das Projeções Planares Oblíquas

Conforme exposto no capítulo 4, as projeções paralelas oblíquas têm a direção do plano de projeção distinta da direção dos raios projetores (fig. 4.8). As projeções paralelas oblíquas se subdividem em *cavalier* e *cabinet* (fig. 4.9), sendo que na projeção *cabinet* há uma distorção na dimensão do versor perpendicular ao plano de projeção, em geral, um encurtamento de 1/3 ou de 1/2. Além disto, em ambos os casos, o ângulo (α) que este versor forma com o eixo x pode ser de 45° ou 30° .

A dedução da matriz de projeção oblíqua é relativamente simples. Considere-se, inicialmente, o ângulo β que a linha entre o ponto $P1$ e sua projeção $P1'$ forma com o eixo z e o ângulo α que é formado pela projeção da linha $P1-P1'$ com o eixo x (fig. 5.4). O ângulo β determina o grau de encurtamento ou de dilatação da dimensão do versor, em especial, se $\beta=45.0^\circ$ não há alteração de dimensão e se $\beta=60^\circ$ há um encurtamento pela metade. O ângulo α não tem influência sobre o tamanho do versor e, basicamente, o seu valor é uma questão de preferência.

Quando o ponto está sobre o eixo z é trivial a dedução da fórmula de projeção, ou seja, sendo:

$$P1 = (0,0,z_1) \Rightarrow P1' = (d \cos(\alpha), d \sin(\alpha))$$

$$P2 = (0,0,z_2) \Rightarrow P2' = ((z_2 / z_1) * d) \cos(\alpha), ((z_2 / z_1) * d) \sin(\alpha))$$

A generalização da formulação para qualquer ponto pode também ser feita facilmente observando-se a figura 5.5. Assim, supondo-se z_1 igual a 1 e z_2 igual a z , tem-se:

$$P2 = (0,b,z) \Rightarrow P2' = (z * d \cos(\alpha), b + (z * d) \sin(\alpha))$$

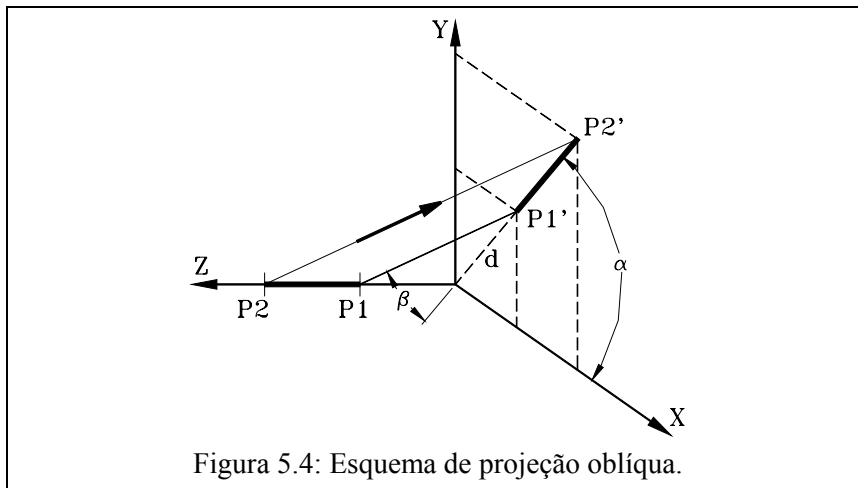
$$P3 = (a,0,z) \Rightarrow P3' = (a + (z * d) \cos(\alpha), (z * d) \sin(\alpha))$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & d \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ((z * d) \cos(\alpha)) \\ y + ((z * d) \sin(\alpha)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.33})$$

Para exemplificar a aplicação da matriz de projeção oblíqua, na matriz da equação 5.33 será adotado $d=1$, sem alteração da dimensão do versor, o que significa ($\beta=45.0^\circ$), e $\alpha=45.0^\circ$, o que define uma matriz de projeção oblíqua *cavalier* (eq. 5.34).

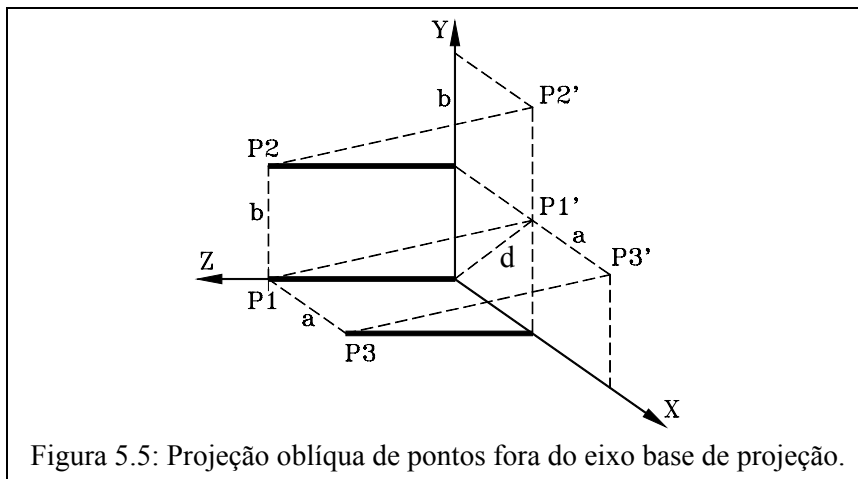
$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.34})$$



Aplicando-se M_O sobre o objeto definido na equação 5.32, tem-se:

$$\bar{P}_O = M_O \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.35})$$

$$\bar{P}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & (2+\sqrt{2})/2 & (2+\sqrt{2})/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & (1+\sqrt{2})/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1 & (1+\sqrt{2})/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.36})$$

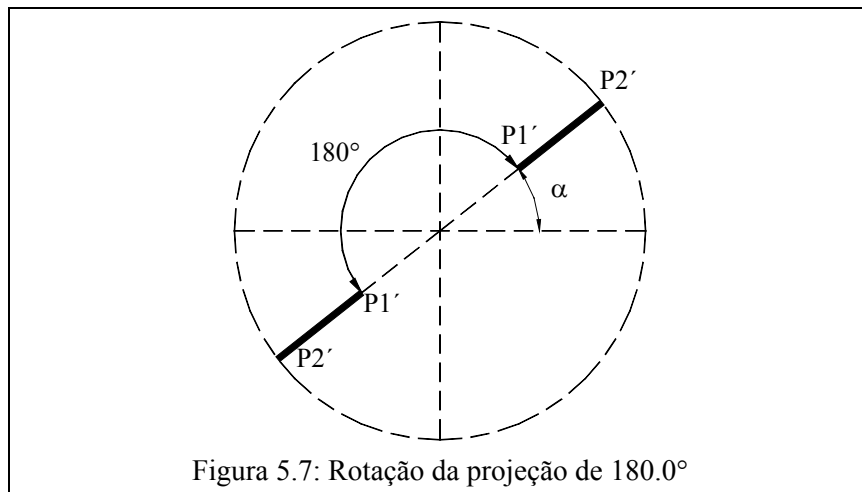
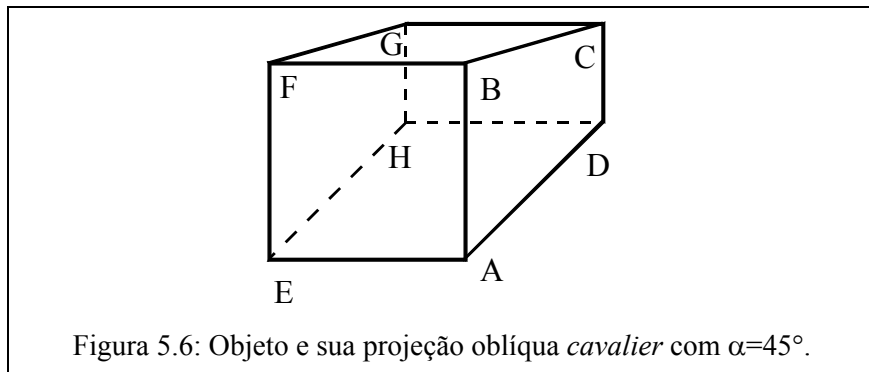


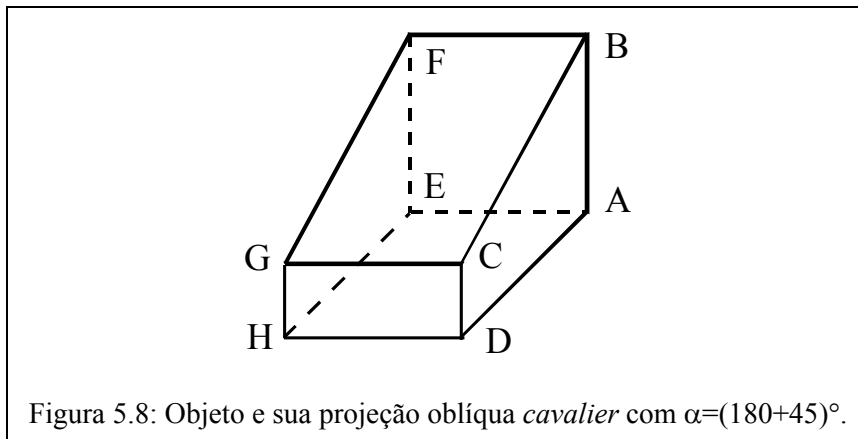
Note-se que o objeto projetado (fig. 5.6) fica com o sentido das faces invertido em relação ao eixo z , ou seja, as faces paralelas ao plano xy e com coordenadas z maior ficam posicionadas na projeção atrás daquelas com coordenadas z menor, o que é o caso da face menor posicionada em relação a face maior. Este fato pode ocasionar alguma confusão e uma solução simples para este problema é considerar o ângulo $\alpha=(180+45)^\circ$. Esta rotação corrige o problema da ordem das faces e ao mesmo tempo mantém o ângulo entre a projeção do versor do eixo z e o eixo horizontal igual a 45° (fig. 5.7). Assim, a nova matriz de projeção fica:

$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.33})$$

Aplicando-se esta nova matriz M_O sobre os pontos do objeto definido na equação 5.30, tem-se os pontos projetados descritos na equação 5.34 e esboçados na figura 5.8.

$$\bar{P}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 & (2-\sqrt{2})/2 & (2-\sqrt{2})/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & (1-\sqrt{2})/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 & (1-\sqrt{2})/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ A & B & C & D & E & F & G & H \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5.34})$$





6. Álgebra das Projeções Planares Perspectivas

Para uma dedução simples e intuitiva da álgebra das projeções perspectivas é interessante se analisar a figura 6.1. Neste caso, o ponto $P(x,y,z)$ é projetado no ponto $P'(x',y',0)$, contido no plano xy , a partir de um centro de projeção localizado no ponto $C(0,0,k)$. Aplicando-se semelhança de triângulos a figura produzida e considerando que a coordenada z tem valor negativo obtém-se:

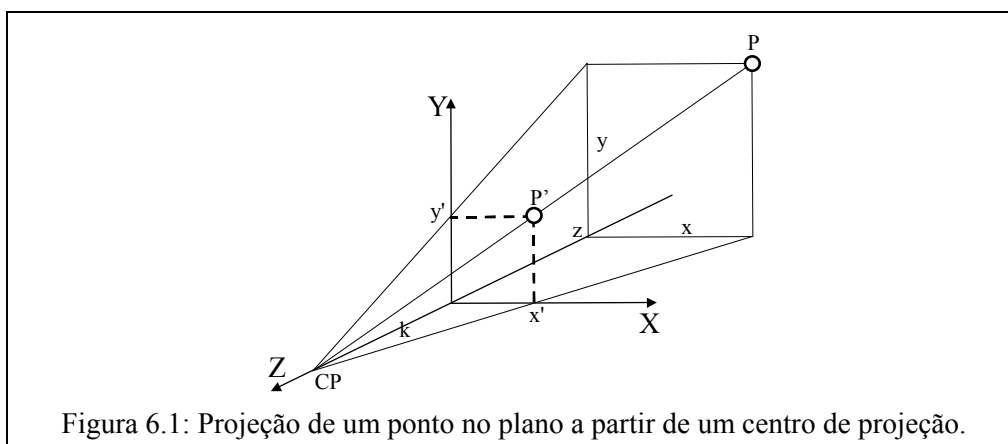
$$x'/k = x/(-z+k) \Rightarrow x' = x/((-z/k)+1) \quad (\text{eq. 6.1})$$

$$y'/k = y/(-z+k) \Rightarrow y' = y/((-z/k)+1) \quad (\text{eq. 6.2})$$

Note-se que estes valores são os mesmos produzidos pela matriz de transformação abaixo.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ (-z/k)+1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.3})$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/H \\ Y/H \\ Z/H \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/((-z/k)+1) \\ y/((-z/k)+1) \\ z/((-z/k)+1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.4})$$



Quando se adota o plano xy como o plano de projeção, desconsidera-se o valor de z' na equação 6.3. Note-se que nesta equação quando $k \rightarrow \infty$, então $x' \rightarrow x$ e $y' \rightarrow y$, o que origina uma projeção paralela, com raios projetores perpendiculares ao plano xy , considerado como o plano de projeção.

Considerando-se $x = at$, $y = bt$ e $z = -ct$, com a , b , e c maiores do que zero, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at / ((ct/k) + 1) \\ bt / ((ct/k) + 1) \\ -ct / ((ct/k) + 1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka/c \\ kb/c \\ -k \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, o ponto $(ka/c, kb/c, -k)$ constitui um ponto-de-fuga, dado que ele é um ponto finito para o qual converge a projeção de uma linha infinita. Dependendo do valor de a , b e c , dado k fixo, infinitos pontos-de-fuga podem ser determinados.

Em termos de classificação da projeção perspectiva interessa apenas os pontos-de-fuga associados as linhas paralelas aos eixos cartesianos. Assim, considere-se:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} at \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ bt \\ c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ ct \\ 1 \end{bmatrix}$$

\vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 definem, respectivamente, uma linha paralela ao eixo x , y e z . A transformação dos pontos destas linhas quando $t \rightarrow \infty$ resulta em:

$$\begin{array}{ccc} \text{(eq. 6.5)} & \text{(eq. 6.6)} & \text{(eq. 6.7)} \\ \vec{v}'_1 = \begin{bmatrix} at / ((-c/k) + 1) \\ b / ((-c/k) + 1) \\ c / ((-c/k) + 1) \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}'_2 = \begin{bmatrix} a / ((-c/k) + 1) \\ bt / ((-c/k) + 1) \\ c / ((-c/k) + 1) \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}'_3 = \begin{bmatrix} a / ((-ct/k) + 1) \\ b / ((-ct/k) + 1) \\ ct / ((-ct/k) + 1) \\ 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \\ \vec{v}'_1 = \begin{bmatrix} \infty \\ B_1 \\ C_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}'_2 = \begin{bmatrix} A_2 \\ \infty \\ C_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \\ 1 \end{bmatrix} & & \end{array}$$

Mesmo sendo B_1 , C_1 , A_2 e C_2 constantes finitas, \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 , que são respectivamente a transformação perspectiva de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , resultam em pontos que no espaço tendem a infinito, ou seja, não há pontos-de-fuga associados as linhas paralelas aos eixos x e y . Este resultado é esperado, pois \vec{v}_1 e \vec{v}_2 definem linhas perpendiculares ao eixo z que contém o centro-de-projeção. A transformação perspectiva de \vec{v}_3 resulta em um ponto finito no espaço, ou seja, há ponto-de-fuga pois \vec{v}_3 é perpendicular ao eixo z que contém o centro de projeção.

Matrizes de transformação perspectiva de dois ou três pontos-de-fuga são obtidas através da combinação destas matrizes, por exemplo:

$$MTP_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/r & -1/s & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad MTP_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/r & -1/s & -1/k & 1 \end{bmatrix}$$

A certificação do número de pontos-de-fuga destas matrizes é obtida através da aplicação dos pontos infinitos em coordenadas homogêneas. Assim, inicialmente, utilizando-se a matriz MTP_{xy} e os pontos definidos pelos vetores das equações 6.8, 6.9 e 6.10 tem-se:

$$\vec{v}'_1 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como foram gerados dois pontos-de-fuga, a matriz MTP_{xy} é uma matriz de transformação perspectiva de dois pontos-de-fuga. Similarmente, aplicando-se a matriz MTP_{xyz} sobre os pontos no infinitos tem-se:

$$\vec{v}'_1 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz MTP_{xyz} é uma matriz de transformação perspectiva de três pontos-de-fuga.

Para aplicações em computação gráfica, o requerido é a “projeção” perspectiva sobre o plano xy . Assim, as matrizes de projeção perspectiva são obtidas zerando-se a terceira linha da matriz de transformação perspectiva, de forma a se desconsiderar a coordenada z . Por exemplo, da matriz de transformação perspectiva MTP_{xyz} , deduz-se a matriz de projeção perspectiva MPP_{xyz} descrita abaixo.

$$MPP_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/r & -1/s & -1/k & 1 \end{bmatrix}$$

O objetivo primordial em se utilizar uma projeção perspectiva é a obtenção de uma visão realística de um objeto. No entanto, somente a aplicação da projeção perspectiva não garante este objetivo. Por exemplo, a figura 6.3 mostra o resultado de uma projeção perspectiva com pontos-de-fuga $(3,0,0)$ e $(0,3,0)$. Neste caso, a qualidade visual desta projeção deixa a desejar.

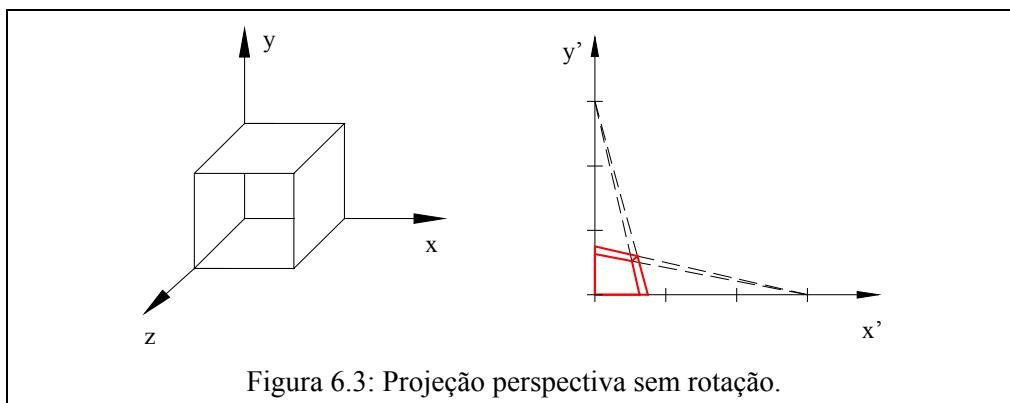


Figura 6.3: Projeção perspectiva sem rotação.

Uma maneira de resolver este problema é utilizar a projeção perspectiva de forma associada com transformações de escalamento e de rotação. A figura 4.15 mostra uma nova visão do objeto quando ele é rotacionado em torno dos eixos x e y e posteriormente projetado através de uma matriz de projeção perspectiva de dois pontos-de-fuga. Neste caso, é possível se ter uma visão completa do objeto e dos pontos-de-fuga. Note-se, em especial, como as linhas paralelas convergem para o mesmo ponto-de-fuga após a projeção.

Em termos de computação gráfica, o foco de interesse é a projeção de um ponto no espaço sobre o plano da tela. Neste sentido, para ilustrar uma forma mais intuitiva de se obter as equações anteriores, a matriz de projeção perspectiva será deduzida a partir da consideração de que a tela do computador está sobre o plano xy e que o centro de projeção (observador) está fora deste plano e em alguma parte positiva do eixo z (fig. 6.4).

Supondo-se conhecido P1 e CP (fig. 6.4), pode-se escrever a equação de reta que passa por estes dois pontos. No caso bidimensional, a equação da reta em função dos pontos pA (x_a, y_a) e pB (x_b, y_b) fica:

$$x = x_a + (x_b - x_a)u$$

$$y = y_a + (y_b - y_a)u$$

Assim, no caso da figura 6.5 tem-se:

$$x = x_c + (x_1 - x_c)u \quad (\text{eq. 6.5})$$

$$y = y_c + (y_1 - y_c)u \quad (\text{eq. 6.6})$$

$$z = z_c + (z_1 - z_c)u \quad (\text{eq. 6.7})$$

Logo, o valor de u para P2, com coordenadas ($x_2, y_2, 0$), é:

$$u = -z_c / (z_1 - z_c) \quad (\text{eq. 6.8})$$

Compondo-se as equações 6.5, 6.6 e 6.8 tem-se:

$$x_2 = x_c - z_c(x_1 - x_c) / (z_1 - z_c) \quad (\text{eq. 6.9})$$

$$y_2 = y_c - z_c(y_1 - y_c) / (z_1 - z_c) \quad (\text{eq. 6.10})$$

Escrevendo-se este resultado em forma matricial tem-se:

$$MP = \begin{bmatrix} -z_c & 0 & x_c & 0 \\ 0 & -z_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_c \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.11})$$

Dividindo-se todos os elementos da matriz MP da equação 6.11 por um mesmo valor não se altera o resultado da sua aplicação sobre um vetor em coordenadas homogêneas. Assim, dividindo-se todos os elementos por $1/z_c$ tem-se:

$$MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c / z_c & 0 \\ 0 & 1 & -y_c / z_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 / z_c & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.12})$$

Considerando-se x_c e y_c iguais a zero na MP da equação 6.12, tem-se:

$$MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 / z_c & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.13})$$

O que está de acordo com a matriz de transformação perspectiva $MTPz$, deduzida anteriormente, no caso do centro de projeção estar no ponto $(0,0,z_c)$ (fig. 6.2).

A matriz MP da equação 6.12 permite um controle explícito do ponto-de-fuga em função do centro de projeção, no entanto, gera apenas um ponto-de-fuga. Para a geração de mais pontos-de-fuga pode-se associar MP com matrizes de rotação. Note-se que, como exposto no capítulo 4.3 e esboçado nas figuras 4.10, 4.11 e 4.12, caso se rotacione o objeto é possível obter um número maior de pontos-de-fuga. Assim, fazendo-se a multiplicação da matriz MP pela matriz $R_x R_y$ (equação 5.4) tem-se a equação 6.14:

$$MPR = \begin{bmatrix} \cos(\phi) + (x_c / z_c) \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) & (-x_c / z_c) \operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\phi) - (x_c / z_c) \cos(\phi) \cos(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) + (y_c / z_c) \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) & \cos(\theta) - (y_c / z_c) \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) - (y_c / z_c) \cos(\phi) \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1 / z_c) \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) & (-1 / z_c) \operatorname{sen}(\theta) & (-1 / z_c) \cos(\phi) \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}$$

Supondo-se z_c , $\operatorname{sen}(\phi)$, $\operatorname{sen}(\theta)$, $\cos(\phi)$, $\cos(\theta)$ diferentes de zero, deriva-se os seguintes pontos-de-fuga:

$$PF_x = \begin{bmatrix} x_c + z_c (\cos(\phi) / (\operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta))) \\ y_c + z_c (\operatorname{sen}(\theta) / \cos(\theta)) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.15})$$

$$PF_y = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c - z_c (\cos(\theta) / \operatorname{sen}(\theta)) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.16})$$

$$PF_z = \begin{bmatrix} x_c - z_c (\operatorname{sen}(\phi) / (\cos(\phi) \cos(\theta))) \\ y_c + z_c (\operatorname{sen}(\theta) / \cos(\theta)) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6.17})$$

Assim, utilizando-se a matriz MPR tem-se o controle simultâneo do centro de projeção e dos pontos-de-fuga. Esta matriz pode ser modificada para incorporar rotações no eixo z .

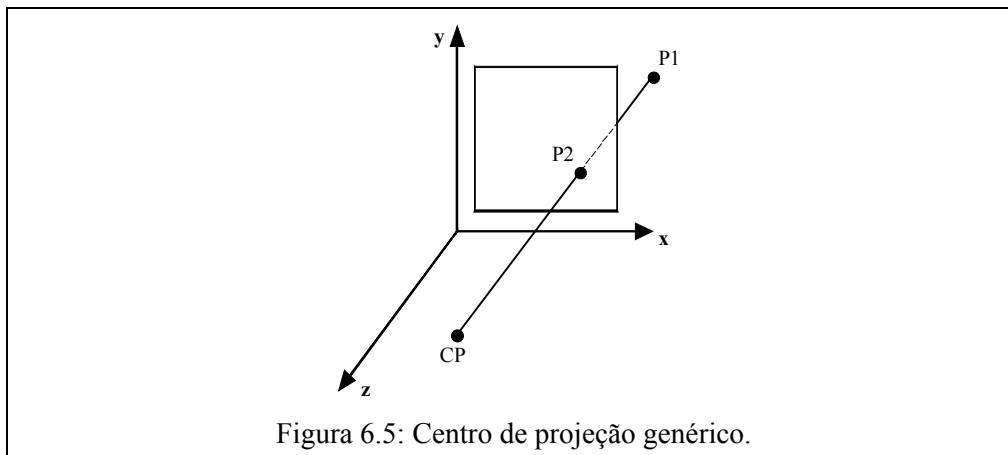


Figura 6.5: Centro de projeção genérico.